Окрестностью точки называется любой интервал, содержащий эту точку.

Точка x называется *предельной точкой* множества E, если в любой окрестности содержится хотя бы одна точка множества E, отличная от точки x. Если точка x множества E не является его предельной точкой, то она называется *изолированной точкой* множества E.

Множество всех предельных точек E называется его *производным множеством* и обозначается E'.

Возможны такие ситуации:

- $E' \subset E$, тогда E — *замкнутое* множество;
- $E \subset E'$, тогда E — *плотное в себе* множество;
- $E = E'$, тогда E — *совершенное* множество.

Определение. Множество $\bar{E} = E \cup E'$ называется *замыканием* множества E.

Точка X множества E называется *внутренней*, если она принадлежит E вместе с некоторой своей окрестностью.
Множество E называется *открытым*, если все его точки внутренние.

Утверждение. E - замкнутое множество $\Rightarrow \complement E$ — открытое множество.

Утверждение. E — открытое множество $\Rightarrow \complement E$ — замкнутое множество.

Утверждение. Если E — открытое множество, а F — замкнутое, то $E \setminus F$ — открытое множество. Если E — замкнутое множество, а F — открытое, то $E \setminus F$ — замкнутое множество.

Теорема 1. Любое открытое множество на прямой может быть представлено в виде конечного или счетного объединения попарно непересекающихся интервалов.

$$\Delta = (a, b),\ |\Delta| = b - a$$

Определение 1. *Покрытием множества* E называется конечная или счетная система интервалов, объединение которых содержит E.

$$s(E) : E \subset \bigcup_{n=1}^{\infty} \Delta_n$$

Длина покрытия $s(E)$:

$$\sigma(s) = \sum_{n=1}^{\infty} |\Delta_n|$$

Внешняя мера множества E:

$$|E|^* = \inf_{s(E)} \sigma(s)$$

1. $E_1 \subset E_2 => |E_1|^* \leqslant |E_2|^*$.
   Этот факт следует из того, что любое покрытие E_2 будет одновременно являться покрытием и для E_1.

2. $E = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n \Rightarrow |E|^* \leqslant \sum\limits_{n=1}^{\infty} |E_n|^*$.

3. $d > 0 => |E_1 \cup E_2|^* = |E_1|^* + |E_2|^*$

4. $\forall \varepsilon > 0$ и $\forall E$ $\exists G$ — открытое, $G \supset E$: $|G|^* < |E|^* + \varepsilon$

Определение 2. Множество E называется *измеримым* (по Лебегу), если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся открытое множество G, содержащее E и такое, что $|G \setminus E|^* < \varepsilon$. При этом $|E| \equiv |E|^*$ называется *мерой* измеримого множества E.

Теорема 1. Любое открытое множество на прямой измеримо, а его мера равна сумме длин составляющих его попарно не пересекающихся интервалов.

Теорема 2. Сумма конечного или счётного числа измеримых множеств является измеримым множеством.

Теорема 3. Любое замкнутое множество F измеримо.

Теорема 4. Если множество E измеримо, то и его дополнение $\complement E$ измеримо.

Следствие. Для того, чтобы множество E было измеримо, необходимо и достаточно, чтобы для $\forall \varepsilon > 0$ нашлось замкнутое множество $F \subset E$ такое, что $|E \setminus F|^* < \varepsilon$.

Теорема 6. Если множества A и B измеримы, то множество $A \setminus B$ также измеримо.

Теорема 5. Пересечение конечного или счётного числа измеримых множеств измеримо.

Теорема 7 (σ-аддитивность меры). Пусть измеримое множество E представимо в виде конечного или счётного объединения попарно не пересекающихся измеримых множеств. Тогда его мера равна сумме мер этих множеств.

Определение 3. Множество G называется *множеством типа* G_δ, если оно представимо в виде пересечения счётного числа открытых множеств G_n ($G = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} G_n$), и *множеством типа* F_σ, если E представимо в виде суммы счётного числа замкнутых множеств F_n ($F = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} F_n$).

Теорема 8. Для любого измеримого множества E существует множество E_1 типа G_δ и множество E_2 типа F_σ такие, что $E_1 \supset E \supset E_2$ и $|E_1| = |E| = |E_2|$.

Обозначим символом $E[f(x) > a]$ множество

$$E[f(x) > a] = \{x \in E : \; f(x) > a\}.$$

Определение 1. Функция $f(x)$, определенная на измеримом множестве E, называется *измеримой на* E, если $\forall a \in \mathbb{R}$ $E[f(x) \geqslant a]$ — измеримое множество.

Свойства измеримых функций:

1. Для того, чтобы функция $f(x)$ была измеримой на множестве E, необходимо и достаточно, чтобы при любом $a \in \mathbb{R}$ одно из множеств

$$E[f(x) > a], \qquad E[f(x) \leqslant a], \qquad E[f(x) < a]$$

было измеримо.

2. Если функция $f(x)$ измерима на множестве E, то она измерима и на любом измеримом подмножестве $E_1 \subset E$.
3. Если функция $f(x)$ измерима на множестве E_k (при всех номерах k), то она измерима и на их объединении $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$.
4. Любая функция измерима на множестве меры 0 (так как любое подмножество меры 0 имеет меру 0 и измеримо).
5. Если $f(x)$ измерима на множестве E, то и любая эквивалентная ей на E функция $g(x)$ измерима на E.

Определение 3. Говорят, что какое-то свойство выполняется почти всюду на множестве E, если множество точек, на которых это свойство не выполняется, имеет меру 0.

6. Если функция $f(x)$ непрерывна почти всюду на измеримом множестве E, то она измерима на этом множестве.

Теорема 1. Пусть функция $f(x)$ измерима на множестве E. Тогда функции $|f(x)|$, $c \cdot f(x)$, $f(x) + c$ (где $c = \text{const}$) также измеримы на E. Множество $E[f(x) > g(x)]$ измеримо в том случае, если $g(x)$ — измеримая функция.

Теорема 2. Пусть функции $f(x)$ и $g(x)$ измеримы на множестве E. Тогда функции $f(x) \pm g(x)$, $f(x) \cdot g(x)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ (при $g(x) \neq 0$) также измеримы на множестве E.

Теорема 3. Пусть E — измеримое множество, на котором определена последовательность измеримых функций $f_n(x)$. Тогда $\underline{f}(x) = \varliminf\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ и $\overline{f}(x) = \varlimsup\limits_{n\to\infty} f_n(x)$ этой последовательности — измеримые функции.

Теорема 4. Пусть E — измеримое множество, и на нем определена последовательность измеримых функций $\{f_n(x)\}$. Пусть $\{f_n(x)\}$ почти всюду сходится к функции $f(x)$. Тогда $f(x)$ измерима на E.

Определение 4. Пусть E — измеримое множество, $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$, $f(x)$ — измеримые, почти всюду конечные на множестве E функции. Говорят, что последовательность $\{f_n(x)\}$ *сходится к* $f(x)$ *по мере* на множестве E, если для любого $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} |E[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon]| = 0,$$

то есть если для любых $\varepsilon > 0$, $\delta > 0$ найдётся номер $N = N(\varepsilon, \delta)$ такой, что при любом номере $n \geqslant N$ справедливо неравенство

$$|E[|f_n(x) - f(x)| \geqslant \varepsilon]| < \delta.$$

Теорема 5 (теорема Лебега). Пусть E — измеримое множество конечной меры, функции $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы и почти всюду конечны на E. Тогда из сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ почти всюду на E вытекает сходимость $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ по мере на множестве E.

Теорема 6 (теорема Рисса). Пусть E — измеримое множество конечной меры, функции $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы и почти всюду конечны на E. Тогда, если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ по мере на множестве E, то из неё можно выделить подпоследовательность $\{f_{n_k}(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ почти всюду на множестве E.

Теорема 7. Пусть E — измеримое множество конечной меры, функции $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$, $f(x)$ и $g(x)$ измеримы и почти всюду конечны на E, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и к $g(x)$ по мере на E. Тогда $f(x)$ и $g(x)$ эквивалентны.

Теорема 8 (теорема Егорова). Пусть E — измеримое множество конечной меры, функции $f_n(x)$ $(n = 1,\ 2, \dots)$ и $f(x)$ измеримы и почти всюду конечны на E, последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на E. Тогда для любого $\delta > 0$ существует такое измеримое множество $E_\delta \subset E$, что $|E_\delta| > |E| - \delta$ и на множестве E_δ последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ равномерно.

Теорема 9 (теорема Лузина). Пусть E — измеримое множество конечной меры, функция $f(x)$ измерима на множестве E. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E_\varepsilon \subset E$ такое, что $|E_\varepsilon| > |E| - \varepsilon$, а функция $\varphi(x)$ такая, что $\varphi(x) = f(x)$ на E_ε ("сужение" функции $f(x)$ на множество E_ε), является непрерывной на E_ε.

$$|f(x)| \leqslant M, \qquad |E| < +\infty.$$

Назовем *разбиением множества* E конечный набор T его подмножеств, попарно не пересекающихся и составляющих его в объединении:

$$E_i \cap E_j = \varnothing,\ i \neq j; \quad \bigcup_{k=1}^{n} E_k = E; \quad T = \{E_k\}_{k=1}^{n}.$$

Рассмотрим на измеримом множестве E конечной меры произвольную ограниченную функцию $f(x)$. Для произвольного разбиения $T = \{E_k\}_{k=1}^{n}$ множества E обозначим символами M_k и m_k соответственно *точную верхнюю* и *точную нижнюю грани* функции $f(x)$ на множестве E_k:

$$M_k = \sup_{x \in E_k} f(x), \quad m_k = \inf_{x \in E_k} f(x).$$

Кроме того, определим *верхнюю интегральную сумму* S_T и *нижнюю интегральную сумму* s_T разбиения T следующим образом:

$$S_T = \sum_{k=1}^{n} M_k |E_k|, \quad s_T = \sum_{k=1}^{n} m_k |E_k|.$$

Очевидно, что $s_T \leqslant S_T$ при любом разбиении T.

Для любой ограниченной на множестве конечной меры E функции $f(x)$ как множество всех верхних интегральных сумм $\{S_T\}$, так и множество всех нижних интегральных сумм $\{s_T\}$ (отвечающих всевозможным разбиениям T множества E) ограничено. Поэтому существует $\inf\limits_T S_T = \overline{I}$, который мы назовём *верхним интегралом Лебега*, и существует $\sup\limits_T s_T = \underline{I}$, который мы назовём *нижним интегралом Лебега*.

Определение 1. Если $\overline{I} = \underline{I} = I$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* на множестве E.При этом I называется *интегралом Лебега* от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается

$$I = \int\limits_E f(x)dx.$$

Теорема 1. Если функция $f(x)$ интегрируема по Риману на сегменте $[a;b]$, то она интегрируема по Лебегу на этом сегменте, причем интегралы Лебега и Римана от $f(x)$ совпадают.

Теорема 2. Любая ограниченная и измеримая на измеримом множестве E конечной меры функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на этом множестве.

Свойства интеграла Лебега:

1.

$$\int\limits_E 1\ dx = |E|.$$

2. Если функция $f(x)$ ограничена и интегрируема на множестве E конечной меры и α — произвольное вещественное число, то и функция $\alpha f(x)$ интегрируема на множестве E, причём

$$\int\limits_E \alpha f(x)dx = \alpha \int\limits_E f(x)dx.$$

3. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничены и интегрируемы по Лебегу на множестве конечной меры E, то функция $f_1(x) + f_2(x)$ интегрируема по Лебегу на множестве E, причём

$$\int\limits_E [f_1(x) + f_2(x)]dx = \int\limits_E f_1(x)dx + \int\limits_E f_2(x)dx.$$

4. Если множество E представимо в виде $E = E_1 \cup E_2$, где E_1 и E_2 — измеримые непересекающиеся множества конечной меры, функция $f(x)$ интегрируема по Лебегу на множествах E_1 и E_2, то $f(x)$ интегрируема по Лебегу и на множестве E, причём

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_{E_1} f(x)dx + \int\limits_{E_2} f(x)dx.$$

5. Если функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ ограничены и интегрируемы на множестве конечной меры E, и почти всюду на E $f_1(x) \geqslant f_2(x)$, то

$$\int\limits_E f_1(x)dx \geqslant \int\limits_E f_2(x)dx.$$

$$|E| \leqslant +\infty, f(x) \geqslant 0$$

Для любого $N > 0$ положим

$$f_N(x) = min\{N, f(x)\} = \begin{cases} f(x), & \text{если } f(x) \leqslant N \\ N, & \text{если } f(x) > N \end{cases}.$$

Функция $f_N(x)$ называется *срезкой* функции $f(x)$. Заметим, что для любой измеримой на множестве E функции $f(x)$ её срезка также будет измеримой, поскольку для любого вещественного a является измеримым множество

$$E[f_N(x) > a] = \begin{cases} E[f(x) > a] & \text{при } a < N \\ \varnothing & \text{при } a \geqslant N \end{cases}.$$

Поэтому для любой измеримой на множестве E функции $f(x)$ существует интеграл

$$I_N = \int\limits_E f_N(x)dx.$$

Определение 2. Если существует конечный предел $I = \lim\limits_{N\to\infty} I_N$, то функция $f(x)$ называется *интегрируемой по Лебегу* на множестве конечной меры E, а указанный предел называется *интегралом* от функции $f(x)$ по множеству E и обозначается

$$I = \lim_{N\to+\infty} I_N = \int\limits_E f(x)dx.$$

Теорема 3 (о полной аддитивности). Пусть $|E| < +\infty$, $f(x) \geqslant 0$ и измерима на E, E представимо в виде $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k, E_k \cap E_l = \varnothing$ при $k \neq l$. Тогда справедливы следующие два утверждения:

1. Если $f(x)$ интегрируема на E, то $f(x)$ интегрируема на E_k и справедливо равенство
$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \qquad (*)$$
2. Если $f(x)$ интегрируема на E_k и ряд в правой части $(*)$ сходится, то $f(x)$ интегрируема на E и $(*)$ выполняется.

Теорема 4 (об абсолютной непрерывности интеграла Лебега). Пусть $|E| < +\infty$, $f(x)$ — неотрицательная, интегрируемая на множестве E по Лебегу функция. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для любого подмножества $e \subset E$, $|e| < \delta$, будет выполняться неравенство

$$\int\limits_e f(x)dx < \varepsilon.$$

Теорема 5. Пусть множество E имеет конечную меру, функция $f(x)$ неотрицательна и интегрируема по Лебегу на E, а $\int\limits_E f(x)dx = 0$. Тогда функция $f(x)$ эквивалентна тождественному нулю (то есть множество, на котором $f(x) \neq 0$, имеет меру 0).

Теорема 6. Пусть множество E имеет конечную меру, $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — неотрицательные, измеримые на E функции и $f_1(x) \geqslant f_2(x)$. Тогда, если функция f_1 интегрируема по Лебегу на E, то и f_2 интегрируема по Лебегу на E и

$$\int\limits_E f_2(x)dx \leqslant \int\limits_E f_1(x)dx$$

Рассматриваем измеримое множество E конечной меры и измеримую функцию $f(x)$, не являющуюся, вообще говоря, ограниченной на множестве E и принимающую на этом множестве значения любых знаков. Введём в рассмотрение две неотрицательные функции

$$f^+(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| + f(x)), \quad f^-(x) = \frac{1}{2}(|f(x)| - f(x)).$$

Очевидно, что

$$f^+(x) + f^-(x) = |f(x)|, \quad f^+(x) - f^-(x) = f(x).$$

Определение 1. Функция $f(x)$ называется *интегрируемой* на множестве E, если на этом множестве интегрируемы функции $f^+(x)$, $f^-(x)$. При этом *интегралом Лебега* от функции $f(x)$ по множеству E называется

$$\int\limits_E f(x)dx = \int\limits_E f^+dx - \int\limits_E f^-dx.$$

Совокупность всех интегрируемых на множестве E функций обозначают символом $L(E)$ или $L^1(E)$. Запись $f(x) \in L(E)$ $(f(x) \in L^1(E))$ означает, что функция $f(x)$ измерима и интегрируема на множестве E.

Утверждение. Измеримая на множестве E функция $f(x)$ интегрируема на E тогда и только тогда, когда функция $|f(x)|$ интегрируема на этом множестве.

Теорема 7 (о полной аддитивности). Пусть множество E представимо в виде $E = \bigcup\limits_{k=1}^{\infty} E_k$, множества E_k измеримы и $E_k \cap E_l = \varnothing$ при $k \neq l$. Тогда справедливы следующие два утверждения:

1. Если $f(x)$ интегрируема на множестве E, то $f(x)$ интегрируема и на каждом из множеств E_k, причём справедливо равенство
$$\int\limits_E f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} f(x)dx. \qquad (*)$$
2. Если функция $f(x)$ измерима и интегрируема на каждом из множеств E_k и сходится ряд $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \int\limits_{E_k} |f(x)|dx$, то $f(x)$ интегрируема на E и выполняеся равенство $(*)$.

Теорема 8 (об абсолютной непрерывности). Если функция $f(x)$ интегрируема на множестве E, то для любого $\varepsilon > 0$ найдётся число $\delta > 0$ такое, что для любого измеримого подмножества $e \subset E$, $|e| < \delta$, будет выполняться неравенство
$$\left| \int\limits_e f(x)dx \right| < \varepsilon.$$

Определение 2. Говорят, что последовательность интегрируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к интегрируемой на E функции $f(x)$ в $L(E)$, если
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E |f_n(x) - f(x)|dx = 0.$$

Замечание 1. Из определения непосредственно следует, что
$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_E f_n(x)dx = \int\limits_E f(x). \quad (**)$$

Замечание 2. Если последовательность измеримых и интегрируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к измеримой и интегрируемой на E функции $f(x)$ в $L(E)$, то $\{f_n(x)\}$ сходится к $f(x)$ и по мере на E.

Теорема 9 (теорема Лебега). Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к измеримой на E функции $f(x)$ по мере на E и существует интегрируемая на множестве E функция $F(x)$ такая, что для всех номеров n и почти всех точек множества E справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, то последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ в $L(E)$.

Следствие. Если последовательность измеримых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ почти всюду на E и существует интегрируемая на множестве E функция $F(x)$ такая, что для всех номеров n и почти всех точек множества E справедливо неравенство $|f_n(x)| \leqslant F(x)$, то функция $f(x)$ суммируема на E и справедливо равенство (**).

Теорема 10 (теорема Леви). Пусть $\{f_n(x)\}$ - последовательность измеримых и интегрируемых на множестве E функций, и пусть для всех номеров n и для почти всех точек множества E справедливо неравенство $f_n(x) \leqslant f_{n+1}(x)$. Пусть существует константа M такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\left|\int\limits_E f_n(x)dx\right| \leqslant M$. Тогда для почти всех точек $x \in E$ существует конечный предел $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$, причём предельная функция $f(x)$ суммируема на множестве E и справедливо равенство (**).

Следствие (формулировка теоремы Леви в терминах функциональных рядов). Если каждая функция $u_n(x)$ неотрицательна почти всюду на множестве E, измерима и интегрируема на этом множестве, и если сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n(x)dx,$$

то почти всюду на E сходится ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x),$$

причём сумма $S(x)$ этого ряда интегрируема на множестве E и удовлетворяет условию

$$\int\limits_E S(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_E u_n(x)dx.$$

Теорема 11 (теорема Фату). Если последовательность измеримых и интегрируемых на множестве E функций $\{f_n(x)\}$ сходится почти всюду на E к предельной функции $f(x)$ и если существует константа A такая, что для всех номеров n справедливо неравенство $\int\limits_E |f_n(x)|dx \leqslant A$, то предельная функция $f(x)$ интегрируема на множестве E и для неё справедливо неравенство $\int\limits_E |f(x)|dx \leqslant A$.

Теорема 12 (теорема Лебега). Пусть измеримое множество E имеет конечную меру. Для того, чтобы ограниченная функция $f(x)$ была интегрируема на множестве E по Лебегу, необходимо и достаточно, чтобы она была измерима.

Определение 1. Говорят, что последовательность множеств $\{E_n\}$ *исчерпывает множество* E с σ-конечной мерой, если для каждого номера n $|E_n| < +\infty$, $E_n \subset E_{n+1}$ и $\bigcup\limits_{n=1}^{\infty} E_n = E$.

Определение 2. Измеримая функция $f(x)$, определённая на множестве E с σ-конечной мерой, называется *интегрируемой* на E, если она интегрируема на каждом измеримом подмножестве $A \subset E$ конечной меры и если для каждой последовательности $\{E_n\}$, исчерпывающей множество E, предел

$$I = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{E_n} f(x)dx$$

существует и не зависит от выбора этой последовательности. Тогда I называется *интегралом Лебега от* $f(x)$ *по множеству* E и обозначается символом $I = \int\limits_E f(x)dx$.

Теорема 1 (теорема Фубини). Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема на $\Pi = \{(x, y) : a \leqslant x \leqslant b, c \leqslant y \leqslant d\}$. Тогда для почти всех $y \in [c, d]$ существует $\int\limits_a^b f(x, y)dx$, для почти всех $x \in [a, b]$ существует $\int\limits_c^d f(x, y)dy$ и

$$\iint\limits_{\Pi} f(x, y)dxdy = \int\limits_c^d dy \int\limits_a^b f(x, y)dx = \int\limits_a^b dx \int\limits_c^d f(x, y)dy.$$

Линейным (векторным пространством) над полем P называется непустое множество L, на котором введены следующие операции:

1. операция сложения: каждой паре элементов x, y множества L ставится в соответствие элемент L, обозначаемый $x + y$;

2. операция умножения на скаляр (элемен поля P): любому элементу $\lambda \in P$ и любому элементу $x \in L$ ставится в соответствие элемент L, обозначаемый λx.

При этом должны выполняться следующие условия:

1. $x + y = y + x \quad \forall x, y \in L$;

2. $x + (y + z) = (x + y) + z \quad \forall x, y, z \in L$;

3. $\exists \theta \in L : \ x + \theta = x \quad \forall x \in L$;

4. $\forall x \in L \ \exists (-x) \in L : \ x + (-x) = \theta$;

5. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x \quad \forall x \in L$;

6. $1 \cdot x = x \quad \forall x \in L$;

7. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x \quad \forall x \in L$;

8. $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y \quad \forall x, y \in L$.

Линейное пространство L называется *нормированным*, если любому элементу $f \in L$ ставится в соответствие действительное число (называемое *нормой* этого элемента и обозначаемое символом $\|f\|_L$), и при этом выполняются следующие условия (*аксиомы*):

1. $\forall f \in L \quad \|f\| \geqslant 0, \qquad \|f\| = 0 \leftrightarrow f = 0;$
2. $\forall f \in L,\ \forall a \in \mathbb{R} \quad \|a \cdot f\| = |a|\|f\|;$
3. $\forall f, g \in L \quad \|f + g\| \leqslant \|f\| + \|g\|.$

Определение 1. Говорят, что функция $f(x)$ принадлежит пространству $L_p(E)$, если $f(x)$ измерима на множестве E, а функция $|f(x)|^p$ интегрируема на E.

Введём в пространстве $L_p(E)$ норму с помощью следующим образом:

$$\|f\|_{L_p(E)} = \|f\|_p = \left(\int\limits_E |f(x)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Неравенство Гельдера. Пусть $p > 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $f(x) \in L_p(E)$, $g(x) \in L_q(E)$. Тогда $f(x) \cdot g(x)$ — интегрируемая функция, и

$$\int\limits_E |f(x)g(x)|dx \leqslant \left(\int\limits_E |f(x)|^p dx\right)^{\dfrac{1}{p}} \cdot \left(\int\limits_E |g(x)|^q dx\right)^{\dfrac{1}{q}}$$

Неравенство Минковского. Пусть $f(x), g(x) \in L_p(E)$, $p \geqslant 1$. Тогда $f(x) + g(x) \in L_p(E)$ и

$$\|f + g\|_p \leqslant \|f\|_p + \|g\|_p.$$

Определение 2. Последовательность $\{f_n\}$ в нормированном пространстве называется *фундаментальной*, если

$$\lim_{\substack{n\to\infty \\ m\to\infty}} \|f_n - f_m\| = 0.$$

Линейное нормированное пространство E называется *полным (банаховым)*, если для любой фундаментальной последовательности $\{f_n\}$ пространства E найдется $f \in E$ такое, что

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Теорема 1. Пусть E — измеримое множество конечной меры, тогда пространство $L_p(E)$, $p \geqslant 1$ — банахово.

Определение. Функция, принимающая конечное или счетное число значений, называется *простой*. Все различные значения простой функции можно обозначить как c_k, где $k = 1, 2, \ldots$.

Определение. *Характеристической функцией множества* E называют функцию

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & x \in E; \\ 0, & x \notin E. \end{cases}$$

Лемма 1. Пусть E — измеримое множество, функция $f(x)$ неотрицательна и измерима на E. Тогда существует неубывающая последовательность простых функций, всюду сходящаяся к функции $f(x)$, причем на множестве конечных значений сходимость равномерна.

Теорема 2. Пусть E — ограниченное измеримое множество, $p \geqslant 1$. Тогда пространство непрерывных функций $C(E)$ всюду плотно в пространстве $L_p(E)$, то есть для любого $\varepsilon > 0$ и любой функции $f(x) \in L_p(E)$ найдётся функция $\varphi(x) \in C(E)$ такая, что

$$\|f(x) - \varphi(x)\|_{L_p(E)} < \varepsilon.$$

Теорема 3 (о непрерывности в метрике L_p). Пусть E — ограниченное измеримое множество. Тогда для любой функции $f(x) \in L_p(E)$ и любого $\varepsilon > 0$ найдется число $\delta > 0$ такое, что при $|h| < \delta$ справедливо неравенство $\|f(x+h) - f(x)\|_{L_p(E)} < \varepsilon$, где функция $f(x)$ продолжена вне E тождественным нулем.

Определение 1. Множество M называется *метрическим пространством*, если каждой паре (x, y) элементов этого множества поставлено в соответствие неотрицательное число $\rho(x, y)$ (называемое *метрикой* или *расстоянием* между элементами x и y), удовлетворяющее следующим условиям (*аксиомам*):

1. $\rho(x, y) = \rho(y, x)$
2. $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
3. $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$ (так называемая *аксиома треугольника*)

Определение 2. Элемент x метрического пространства M называется *пределом последовательности* $\{x_n\}$ (обозначается $x = \lim\limits_{n\to\infty} x_n$), если

$\rho(x, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$.

Последовательность $\{x_n\}$ элементов метрического пространства M называется *фундаментальной*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдётся номер $n_0(\varepsilon)$ такой, что при $n, m \geqslant n_0$ $\rho(x_m, x_n) < \varepsilon$ (другими словами, $\rho(x_m, x_n) \to 0$ при $n \to \infty$ и $m \to \infty$).

Последовательности в метрическом пространстве обладают следующими свойствами:

1. $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad x_{n_k} \to x$ (очевидно).
2. $x_n \to x, x_n \to y \quad \Rightarrow \quad x = y$.
3. $x_n \to x \quad \Rightarrow \quad \rho(x_n, \theta) \leqslant K\ \forall\theta$.

Введём следующие обозначения:

- *Шаром с центром в точке a и радиусом r* называется множество точек $S(a, r) = \{\rho(a, x) < r\}$;
- *Замкнутым шаром с центром в точке a и радиусом r* называется множество точек $S(a, r) = \{\rho(a, x) \leqslant r\}$;
- *Окрестностью точки a* называется любой шар $S(a, r)$;
- Множество называется *ограниченным*, если оно содержится в каком-либо шаре;

- В метрическом пространстве M точка a называется *предельной точкой* множества X ($X \subset M$), если в любой окрестности точки a содержится хотя бы одна точка множества X, отличная от a, то есть если $\forall r\ S(a, r) \cap \{X \setminus a\} \neq \varnothing$;

- *Замыканием* множества X называется множество, полученное присоединением к X всех его предельных точек;
- Множество X называется *замкнутым*, если оно совпадает со своим замыканием ($X = \overline{X}$);

- Множество X называется *открытым*, если замкнуто его дополнение $\complement X = M \setminus X$;

- Множество X называется *всюду плотным в метрическом пространстве* M, если $\overline{X} = M$;

- Множество X называется *нигде не плотным в метрическом пространстве* M, если любой шар пространства M содержит в себе шар без точек множества X.

Определение 3. Метрическое пространство M называется полным, если любая фундаментальная последовательность в M сходится к некоторому пределу, являющемуся элементом M.

Рассмотрим множество всех числовых последовательностей вещественных чисел $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots)$ таких, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^p < +\infty$ ($p > 1$). Для его элементов $x = (\xi_1,\ \xi_2,\ \dots)$ и $y = (\eta_1,\ \eta_2,\ \dots)$ определим расстояние по формуле

$$\rho_p(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i - \eta_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Эта метрика удовлетворяет трём аксиомам метрического пространства. Полученное пространство называется *пространством* l_p.

Утверждение. l_p — полное пространство.

Теорема 1 (о вложенных шарах). Пусть в полном метрическом пространстве имеется последовательность вложенных друг в друга замкнутых шаров, радиусы которых стремятся к нулю:

$$\overline{S_1(a_1, r_1)} \supset \overline{S_2(a_2, r_2)} \supset \ldots, \quad r_n \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Тогда существует одна и только одна точка, принадлежащая всем этим шарам.

Определение 4. Множество X метрического пространства M называется *множеством 1-й категории*, если его можно представить в виде не более чем счётного объединения нигде не плотных множеств. Множество, не являющееся множеством 1-й категории, называется *множеством 2-й категории.*

Множество рациональных точек на $\mathbb{R}$ является множеством 1-й категории, множество иррациональных точек — множеством 2-й категории.

Теорема 2 (теорема Бэра о категориях). Полное метрическое пространство является множеством 2-й категории.

Рассмотрим оператор $A : M \to M$. Оператор A называется *сжимающим отображением (сжимающим оператором) на* M, если существует число $\alpha < 1$ такое, что для всех $x, y \in M$ справедливо неравенство

$$\rho(Ax, Ay) \leqslant \alpha\rho(x, y).$$

Неподвижной точкой оператора A называется точка, удовлетворяющая условию $Ax = x$.

Теорема 3 (Принцип сжимающих отображений). Пусть M — полное метрическое пространство, A — сжимающее отображение на M. Тогда A имеет единственную неподвижную точку в M.

Линейным многообразием L в линейном пространстве X называется непустое подмножество пространства X, обладающее тем свойством, что для любых элементов $x, y \in L$ их линейная комбинация $\alpha x + \beta y$ также принадлежит L.

Определение 4. Линейное многообразие в нормированном пространстве называется *подпространством*, если оно замкнуто относительно сходимости по норме.

Теорема 4 (теорема Рисса). Пусть X — подпространство в нормированном пространстве M, не совпадающее с M. Тогда для любого $\varepsilon \in (0,1)$ найдётся элемент $y \in M \setminus X$, $\|y\| = 1$ и такой, что $\forall x \in X \ \|x-y\| > 1-\varepsilon$.

Определение 1. Оператор A, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y над одним и тем же полем чисел ($\mathbb{R}$ или $\mathbb{C}$), называется *линейным оператором*, если

1. $\forall x_1, x_2 \in X \ A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2$;
2. $\forall x \in X, \ \forall \lambda \in \mathbb{R} (\lambda \in \mathbb{C}) \ A\lambda x = \lambda A x_1$.

Определение 2. Оператор $: X \to Y$ называется *непрерывным*, если из сходимости последовательности $\{x_n\}$ к x в пространстве X следует сходимость последовательности $\{Ax_n\}$ к Ax в пространстве Y.

Теорема 1. Для того, чтобы линейный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был непрерывен хотя бы в одной точке.

Определение 3. Оператор $A : X \to Y$ называется *ограниченным*, если найдётся константа M такая, что для всех $x \in X$ будет справедливо неравенство $\|Ax\|_Y \leqslant M\|x\|_X$. При этом минимальная из таких констант называется *нормой оператора* A: $\|A\| \equiv infM = \sup\limits_{x \neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$.

Теорема 2. Для того, чтобы линейный оператор был непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он был ограничен.

Утверждение. Пусть даны два линейных нормированных пространства, X и Y. Тогда совокупность всех линейных операторов, действующих из X в Y (будем обозначать её $L(X \to Y)$) образует линейное нормированное пространство.

Теорема 3. Пусть X — линейное нормированное пространство, Y — банахово пространство. Тогда $L(X \to Y)$ — банахово пространство.

Следствие. Пространство X^*, сопряжённое с линейным нормированным пространством X, является банаховым пространством.

Теорема 4 (теорема Банаха-Штейнгауза, принцип равномерной ограниченности). Пусть X и Y — банаховы пространства, на которых задана последовательность линейных ограниченных операторов: $A_n \in L(X \to Y)$. Тогда, если последовательность $\|A_n x\|$ ограничена для любого $x \in X$, то последовательность норм операторов также будет ограниченной, то есть найдётся константа C такая, что $\|A_n\| \leqslant C$.

Следствие. Пусть X и Y — банаховы пространства, задана последовательность линейных ограниченных операторов $A_n \in L(X \to Y)$ и существует последовательность $\{x_n\}$, $x_n \in X$ такая, что $\|x_n\| \leqslant 1$, а $\|A_n x_n\| \to +\infty$ при $n \to \infty$. Тогда найдётся элемент $x \in X$, $\|x_0\| \leqslant 1$, такой, что $\limsup\limits_{n\to\infty} \|A_n x_0\| = +\infty$.

Пусть есть два линейных нормированных пространства — X и Y. Рассмотрим оператор $A : X \to Y$ с областью определения $D(A) = X$ и областью значений $R(A) \subset Y$.

Если для любого $y \in R(A)$ уравнение $Ax = y$ имеет единственное решение, то говорят, что определен *обратный оператор* $A^{-1} : R(A) \to X$, то есть $X = A^{-1}Y$. Очевидно, что $AA^{-1} = E$ и $A^{-1}A = E$ — тождественные операторы на $R(A)$ и X соответственно.

Если для оператора $A : X \to Y$ существует оператор $A^{-1} : R(A) \to X$ такой, что

$$A^{-1}Ax = x, \quad AA^{-1}y = y,$$

то операторы A и A^{-1} называются *взаимно обратными*. Если выполняется только неравенство $A^{-1}Ax = x$, то оператор A^{-1} называется *левым обратным* оператором для A; если выполняется только неравенство $AA^{-1}y = y$, то оператор A^{-1} называется *правым обратным* оператором для A.

Теорема 1. Пусть A — линейный оператор, отображающий линейное нормированное пространство X на линейное нормированное пространство Y, причём существует такая константа $m > 0$, что $\|Ax\| \geqslant m\|x\|$ для всех $x \in X$. Тогда существует обратный линейный ограниченный оператор A^{-1}, $\|A^{-1}y\| \leqslant \frac{1}{m}\|y\|$.

Теорема 2 (теорема Неймана). Пусть X — банахово пространство, оператор $A \in L(X \to X)$, и пусть $\|A\| \leqslant q < 1$. Тогда оператор $(I - A)$ имеет обратный линейный ограниченный оператор $(I - A)^{-1}$, $\|(I - A)^{-1}\| \leqslant \frac{1}{1-q}$.

Теорема 3. Пусть X — банахово пространство, $A, A^{-1} \in L(X \to X)$ и существует линейный ограниченный оператор ΔA такой, что $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$. Тогда оператор $B = A + \Delta A$ имеет обратный оператор B^{-1}, причём

$$\|B^{-1} - A^{-1}\| \leqslant \frac{\|\Delta A\| \|A^{-1}\|^2}{1 - \|\Delta A\| \|A^{-1}\|}.$$

Теорема 4 (теорема Банаха об обратном операторе). Пусть X и Y — банаховы пространства, линейный ограниченный оператор A отображает всё пространство X на всё пространство Y взаимно однозначно. Тогда существует обратный линейный ограниченный оператор A^{-1}.

Линейный непрерывный оператор, значения которого принадлежат пространству $\mathbb{R}_1$, называется *линейным функционалом*.

$$L : X \to \mathbb{R}_1.$$

Теорема 1 (теорема Хана-Банаха о продолжении линейного функционала). Пусть X — линейное нормированное пространство, $L \subset X$ - линейное многообразие, на котором задан линейный функционал $f(x)$. Тогда $f(x)$ можно продолжить на всё пространство X с сохранением нормы, то есть на X существует линейный функционал $F(x)$ такой, что:

1. $F(x) = f(x)$ на L;
2. $\|F\|_X = \|f\|_L$.

Следствие 1. Пусть X — линейное нормированное пространство, $x_0 \neq 0$ — произвольный элемент X. Тогда существует линейный функционал $f(x)$, определённый на всём пространстве X и такой, что

1. $\|f\| = 1$;
2. $|f(x_0)| = \|x_0\|$.

Следствие 2. Пусть X — линейное нормированное пространство, элементы $x_1, x_2 \in X$ и $x_1 \neq x_2$. Тогда существует линейный функционал $f(x)$ такой, что $f(x_1) \neq f(x_2)$.

Теорема 2. Пусть X — банахово пространство, $\{x_n\}$ — последовательность элементов $x \in X$ такая, что последовательность $\{f(x_n)\}$ ограничена для любого функционала $f \in X^*$. Тогда последовательность $\{x_n\}$ ограничена в X, то есть существует константа $C > 0$ такая, что $\|x_n\| \leqslant C$.

Теорема 3. Пусть X — банахово пространство, на котором задана последовательность линейных функционалов $\{f_n\}$, причём при любом $x \in X$ последовательность $\{f_n\}$ является ограниченной. Тогда найдётся константа $C > 0$ такая, что $\|f_n\| \leqslant C$.

Определение 1. Последовательность $\{x_n\}$ элементов линейного нормированного пространства X называется слабо сходящейся к элементу $x \in X$, если для любого линейного функционала $f \in X^*$ последовательность $\{f(x_n)\}$ сходится к $f(x)$ при $n \to \infty$.

Утверждение (вытекает из следствия 1 к теореме Хана-Банаха). Слабый предел у последовательности может быть только один.

Следствие из теоремы 2. Слабо сходящаяся последовательность ограничена.

Теорема 4. Для того, чтобы слабо сходящаяся последовательность $\{x_n\}$ в банаховом пространстве X являлась сильно сходящейся, необходимо и достаточно, чтобы для всех $f \in X^*$, $\|f\| \leqslant 1$, последовательность $\{f(x_n)\}$ сходилась равномерно.

Определение 1. Множество H называется *гильбертовым пространством*, если

1. H — линейное пространство над полем действительных или комплексных чисел.

2. Каждой паре элементов $x, y \in H$ поставлено в соответствие число (x, y), комплексное или действительное, называемое *скалярным произведением* этих элементов и удовлетворяющее следующим аксиомам:

3. H — полное в метрике $\rho(x, y) = \|x - y\|$ пространство.

4. H — бесконечномерное пространство, то есть для любого натурального числа n в нём найдётся n линейно независимых элементов.

Утверждение 1. Пусть H — гильбертово пространство, тогда для любых $x, y \in H$ верно неравенство

$$|(x, y)| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

Известно, что линейное нормированное пространство является гильбертовым тогда и только тогда, когда в нем выполняется соотношение, называемое *равенством параллелограмма*:

$$\|x - y\|^2 + \|x + y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2.$$

Определение 2. Множество W называется *выпуклым*, если

$$\forall \alpha \in [0; 1] \quad x, y \in W \;\Rightarrow\; \alpha x + (1 - \alpha) y \in W.$$

Теорема 1. В произвольном гильбертовом пространстве H любое замкнутое выпуклое множество содержит единственный элемент с наименьшей нормой.

Теорема 2 (Леви). Пусть H — гильбертово пространство, L — подпространство в H (замкнутое относительно сходимости по норме линейное

многообразие). Тогда любой элемент $x \in H$ можно единственным образом представить в виде

$$x = y + z, \quad y \in L,\ z \perp L,$$

причем

$$\|x - y\| = \min_{u \in L} \|x - u\|.$$

Определение 3. *Ортогональным дополнением* к подпространству L гильбертова пространства H называется множество всех элементов, ортогональных L:

$$L^{\perp} = \{\, z \in H \mid z \perp L \,\}.$$

Теорема 3. Пусть H — произвольное гильбертово пространство, L — подпространство в H. Тогда H представимо в виде суммы L и его ортогонального дополнения:

$$H = L \oplus L^{\perp}.$$

Утверждение 2. $L = \left(L^{\perp}\right)^{\perp}$.

Определение 4. *Ядром* линейного функционала $f(x)$ называется множество всех элементов, для которых $f(x) = 0$:

$$\ker f = \{\, x \mid f(x) = 0 \,\}.$$

Лемма 1. $\dim(\ker f)^{\perp} = 1,\ f \neq 0.$

Теорема 3 (теорема Рисса — Фреше о представлении линейного функционала). Любой линейный функционал в гильбертовом пространстве H представим в виде

$$f(x) = (x, y),\ y \in H,$$

причем элемент y однозначно определяется по f и $\|f\| = \|y\|$.

Лемма 2. Для того, чтобы линейное многообразие M было всюду плотно в гильбертовом пространстве H, необходимо и достаточно, чтобы не существовало никакого элемента H, кроме нулевого, ортогонального M.

Определение 5. Система $\{e_i\}$ в гильбертовом пространстве называется *ортонормированной*, если

$$(e_i, e_j) = \delta_i^j = \begin{cases} 1, & i = j, \\ 0, & i \neq j. \end{cases}$$

Определение 6. Любая ортонормированная система $e_1, e_2, \ldots$ в гильбертовом пространстве H называется *ортонормированным базисом*, если замыкание ее линейной оболочки совпадает со всем пространством:

$$\overline{L(e_1, e_2, \ldots)} = H.$$

Лемма. Пусть $\{e_1, \ldots, e_n\}$ — ортонормированная система в гильбертовом пространстве H. Тогда $L(e_1, \ldots, e_n)$ — подпространство в H.

Теорема 4. В любом сепарабельном гильбертовом пространстве существует счетный ортонормированный базис.

Определение 4. Ортонормированная система в гильбертовом пространстве называется *полной*, если не существует никакого элемента, кроме 0, ортогонального всем элементам системы. Система называется *замкнутой*, если замыкание ее линейной оболочки совпадает со всем пространством.

Теорема 5. Любые два сепарабельные гильбертовы пространства изометричны и изоморфны между собой.

Теорема 6 (теорема Рисса — Фишера). l_2 и L_2 над одним полем изометричны и изоморфны.

Теорема 7 (о слабой компактности в H). Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, $\{x_n\}$ — последовательность элементов H такая, что $\|x_n\| < C, \quad C > 0$. Тогда существует подпоследовательность $\{x_{n_k}\}$, сходящаяся слабо.

Определение 1. Пусть задан линейный оператор $A : X \to Y$, X и Y — линейные нормированные пространства. Тогда для любого линейного функционала $\varphi(y) \in Y^*$ определен функционал

$$f(x) = \varphi(Ax), f \in X^*.$$

Таким образом, можно определить отображение

$$A^* : Y^* \to X^*, \text{обозначается} \quad f = A^*\varphi,$$

называемое *сопряженным оператором.*

Если сопряженный оператор существует, то он является линейным:

$$(\alpha A + \beta B)^* = \alpha A^* + \beta B^*.$$

Теорема 1. Пусть X, Y — линейные нормированные пространства и задан линейный ограниченный оператор $A : X \to Y$. Тогда существует сопряженный оператор $A^* : Y^* \to X^*$, который также является линейным и ограниченным и $\|A^*\| = \|A\|$.

Следствие. Если операторы A и A^* являются сопряженными в гильбертовом пространстве H, то для любых двух элементов $x, y \in H$ верно $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Определение 2. *Образом* оператора $A : X \to Y$ называется множество

$$\operatorname{Im} A = \{\, y \in Y \mid y = Ax \,\}.$$

Ядром оператора $A : X \to Y$ называется множество

$$\ker A = \{\, x \in X \mid Ax = 0 \,\}.$$

Теорема 2. Пусть H — гильбертово пространство, A — оператор, действующий в H, A^* — сопряженный к A оператор. Тогда

$$H = \overline{\operatorname{Im} A} \oplus \ker A^*.$$

Определение 1. Множество M линейного нормированного пространства X называется *компактным*, если любая последовательность элементов множества M содержит подпоследовательность, сходящуюся к элементу из пространства X.

Множество M называется *предкомпактным* или *относительно компактным*, если любая последовательность элементов M содержит фундаментальную подпоследовательность.

Определение 2. Линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, называется *компактным*, если он любое ограниченное множество переводит в компактное.

Линейный оператор, действующий из линейного нормированного пространства X в линейное нормированное пространство Y, называется *вполне непрерывным*, если он любое ограниченное множество переводит в предкомпактное.

В банаховом пространстве компактный оператор является вполне непрерывным, и наоборот (то есть, в банаховом пространстве компактность равносильна предкомпактности).

Критерий компактности в пространствах $C(E)$ и $L_p(E), p \geqslant 1$ (E — замкнутое ограниченное множество):

Множество $M \subset C(E) \quad (M \subset L_p(E), p \geqslant 1)$ является компактным

$$\Updownarrow$$

1. M ограничено;
2. M равностепенно непрерывно.

Соответственно, множество $M \subset C(E)$ (E — ограниченное и замкнутое) компактно

$$\Updownarrow$$

1. $\exists C > 0 : \qquad |x(t)| \leqslant C, \qquad \forall x(t) \in M;$
2. $\forall x(t) \in M$, $\forall \varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что
$$\forall t', t'' \in E, \quad |t' - t''| < \delta(\varepsilon) \quad \Rightarrow \quad |x(t') - x(t'')| < \varepsilon.$$

Множество $M \subset L_p(E)$ (E — замкнутое и ограниченное, $p \geqslant 1$) компактно

$$\Updownarrow$$

1. $\exists C > 0 : \qquad \|x(t)\|_{L_p(E)} \leqslant C \qquad$ для всех $\quad x(t) \in M;$
2. $\forall x(t) \in M, \quad \forall \varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что
$$\forall h, \quad |h| < \delta \quad \Rightarrow \quad \|x(t+h) - x(t)\|_{L_p(E)} < \varepsilon$$

(функция $x(t)$ продолжена вне E тождественным нулем).

Лемма 1. Если последовательность $\{x_n\}$ в банаховом пространстве X является слабо сходящейся и компактной, то она является сильно сходящейся.

Лемма 2. Пусть X и Y — банаховы пространства, A — вполне непрерывный оператор, действующий из X в Y. Тогда он любую слабо сходящуюся последовательность переводит в сильно сходящуюся последовательность:

$$x_n \xrightarrow{\text{сл.}} x \quad \Rightarrow \quad Ax_n \to Ax.$$

Лемма 3. Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий из H в H, где H — сепарабельное гильбертово пространство. Тогда сопряженный оператор A^* также вполне непрерывен.

Теорема 1. Для того, чтобы линейный и ограниченный оператор A, действующий в гильбертовом пространстве, был вполне непрерывным, необходимо и достаточно, чтобы он любую слабо сходящуюся последовательность переводил в сильно сходящуюся последовательность.

Пусть A — вполне непрерывный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H. Будем искать решения уравнения

$$Lx = f, \quad L = I - A, \quad x \in H, f \in H.$$

Лемма 1. $\operatorname{Im} L = \overline{\operatorname{Im} L}$.

Лемма 2. Пространство H разложимо в прямую сумму

$$H = \operatorname{Im} L \oplus \ker L^*.$$

Теорема 1 (первая теорема Фредгольма). Для того, чтобы операторное уравнение $Lx = f$ было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы f был ортогонален ядру сопряженного оператора:

$$f \perp y,\ L^* y = 0\ \forall y.$$

Обозначим

$$\operatorname{Im} L = H^1, \ldots, \operatorname{Im} L^k = H^k.$$

Очевидно, выполнено соотношение $H = H^0 \supseteq H^1 \supseteq \ldots$.

Лемма 2. Существует такой номер k, что $H^k = H^{k-1}$.

Лемма 4. Если ядро оператора L не содержит отличного от нуля элемента, то его образ совпадает со всем пространством:

$$\ker L = 0 \quad \Rightarrow \quad \operatorname{Im} L = H.$$

Лемма 5. Если образ оператора L совпадает со всем пространством, его ядро содержит только нулевой элемент:

$$\operatorname{Im} L = H \quad \Rightarrow \quad \ker L = 0.$$

Теорема 2 (вторая теорема Фредгольма, альтернатива Фредгольма). Либо операторное уравнение $Lx = f$ разрешимо при любой правой части, либо соответствующее однородное уравнение $Lx = 0$ имеет нетривиальное решение.

Теорема 3 (третья теорема Фредгольма). Размерности ядра оператора L и сопряженного оператора L^* конечны и равны:

$$\dim\ker L = \dim\ker L^* < +\infty.$$

Определение 1. Число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется *регулярным значением* оператора A, если оператор $B = (\lambda I - A)^{-1}$ определен на всем пространстве X.

Определение 2. Множество всех регулярных значений оператора A называется *резольвентным множеством* оператора A:

$$\rho(A) = \{\, \lambda \in \mathbb{C} \mid D((\lambda I - A)^{-1}) = X \,\}.$$

Определение 3. *Спектром* оператора A называется множество всех комплексных чисел, не являющихся регулярными значениями A:

$$\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A).$$

Если выполнены следующие условия:

1. $\ker(\lambda I - A) = 0$
2. $\operatorname{Im}(\lambda I - A) = X$,

Определение 4. Если $\ker(\lambda I - A) \neq 0$, то λ называется *собственным значением* оператора A.

Элемент $x \neq 0$, $\quad x \in \ker(\lambda I - A)$ называется в таком случае *собственным элементом* оператора A.

Теорема 1 (Гильберта - Шмидта). Пусть A — самосопряженный оператор, действующий в гильбертовом пространстве H.

Если A является вполне непрерывным, то любой элемент $x \in \operatorname{Im} A$ представим в виде

$$x = \sum_{\lambda_k \neq 0} (x, e_k) e_k,$$

где $\{\lambda_k\}$ — собственные значения оператора A, а $\{e_k\}$ — соответствующие им собственные элементы.